Section B (Programme T)

MATHEMATIQUES (Durée: 4 h))

Première partie

k étant un réel strictement positif donné, on considère la famille $(K_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}_*^+}$ de fonctions réelles de variable réelle où chacune des fonctions K_γ est définie par :

$$\forall x > 0 \qquad K_\gamma(x) = x^\gamma e^{-kx}$$

– $\mathbb{R}_*^+$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs.

On désigne par G_γ le graphe de K_γ.

1° *a.* Étudier les variations d'une fonction K_γ. Construire approximativement les graphes $G_{1/2}$, G_1 et G_2.

b. Préciser les coordonnées du point de G_γ à tangente parallèle à l'axe des abscisses et déterminer l'ensemble de ces points lorsque γ décrit $\mathbb{R}_*^+$.

c. Quelle est la fonction limite de la famille (K_γ) lorsque γ tend vers 0? La convergence de K_γ vers cette fonction limite est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_*^+$?

2° Montrer que l'aire $\mathcal{A}_\gamma$ comprise entre le graphe G_γ et l'axe des abscisses est finie. Calculez $\mathcal{A}_\gamma$ pour $\gamma \in \mathbb{N}$.

3° Tracer avec soin sur une feuille de papier millimétré le graphe de la fonction $x \longrightarrow xe^{-x}$ $(x > 0)$. On prendra 5 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 25 cm sur l'axe des ordonnées. On pourra s'aider de la table numérique suivante :

x	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5
e^{-x}	0,779	0,607	0,472	0,368	0,135	0,050	0,018	0,006

Deuxième partie

On suppose désormais $\gamma = 1$ et on pose $K(x) = K_1(x) = x\,e^{-kx}$ $\forall x > 0$.

1° *a.* Montrer qu'il existe deux fonctions notées f_k et g_k définies toutes deux sur l'intervalle image de K (Im K) à valeurs respectivement dans des intervalles I et J tels que :

$$\begin{cases} I \cup J = \mathbb{R}_*^+ \\ I \text{ est borné} \\ \forall x \in I \quad f_k(K(x)) = x \\ \forall x \in J \quad g_k(K(x)) = x \end{cases}$$

b. On déterminera I et J, les tableaux de variations des fonctions f_k et g_k et leurs graphes. (On ne demande pas de déterminer explicitement ces deux fonctions.)

2° Établir que les fonctions f_k et g_k sont continûment dérivables à l'intérieur de l'intervalle Im K. Trouver une relation liant $f_k(x)$ et $f'_k(x)$ lorsque x appartient à ce domaine. Préciser le comportement de f'_k et $g'_k(x)$ aux bornes de l'intervalle Im K.

3° On considère l'application F de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ dans lui-même définie par

$(x, y) \longmapsto (X, Y) = (A(x), B(y))$ où $A(x) = x\,e^{-ax}$
$B(y) = y\,e^{-by}$

a et b étant des réels strictement positifs.

a. Déterminer avec précision l'image $R_{a,b}$ de F.

b. Déterminer l'image réciproque par F d'un point de $R_{a,b}$, en particulier lorsque ce point est un point frontière de $R_{a,b}$.

c. Soit H_C l'ensemble des couples de réels (X, Y) tels que XY = C où C est une constante strictement positive. Comment choisir C pour que l'intersection de H_C et de $R_{a,b}$ soit non vide et non réduite à un point?

d. En utilisant les fonctions f_a et g_a (respectivement f_b et g_b) associées aux fonctions A et B, comme il est indiqué dans la question II 1° *a.*, décrire l'image réciproque par F de H_C.

On montrera qu'elle se compose de quatre arcs de courbe (aucune représentation paramétrique n'est demandée).

Préciser la continue différentiabilité de ces arcs. Tracer approximativement ces arcs, préciser les tangentes aux extrémités. Qu'en conclure pour la réunion Γ de ces arcs? Situer le point de coordonnées $(1/a, 1/b)$ par rapport à Γ. .../...

Troisième partie

Soit maintenant le système différentiel (D) :

$$(D)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-1 + ax) \end{cases}$$

où x *et* y *sont strictement positifs.* On lui associe l'équation différentielle (E) :

$$(E)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y(-1 + ax)}{x(1 - by)}$$

1° Trouver l'intégrale générale de (E) sous la forme $H(x, y) = C$, où C est une constante. Dans la suite, on désignera par « courbe intégrale de (E) ou de (D)» l'ensemble des points (x, y) vérifiant $H(x, y) = C$.

2° En s'appuyant sur les résultats de la deuxième partie, indiquer l'allure générale d'une courbe intégrale de (E).

3° Étudier la concavité de ces courbes. Déterminer l'ensemble de leurs points de contact avec des tangentes issues de O.

4° On fixe *désormais* $a = b = 1$.
En utilisant les résultats de la question I.3°, tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe intégrale du système (D) passant par le point $x_0 = 0{,}25$ $y_0 = 1$. On prendra comme unité sur chaque axe 5 cm.

5° Le système fournit deux expressions pour dt, à savoir :

$$\omega_1 = \frac{dx}{x(1 - y)} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \frac{dy}{y(-1 + x)}$$

On se donne un segment de droite AB de longueur l passant par le point $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Donner une représentation paramétrique de ce segment; exprimer ω_1 et ω_2 en fonction du même paramètre et calculer $\int_{AB} \omega_1$ et $\int_{AB} \omega_2$. Trouver une condition pour que la différence de ces intégrales soit un infiniment petit du second ordre au moins, l'infiniment petit principal étant l.

Interpréter géométriquement cette condition.

6° Pour étudier les solutions voisines du point $x = 1$, $y = 1$, on effectue le changement de variable :

$$x = 1 + \xi$$
$$y = 1 + \eta$$

On posera aussi $\xi + \eta = s$, $\xi\eta = p$.

a. Déduire de l'intégrale générale de (E) une équation liant s et p; la résoudre en p. Déterminer l'équation fournissant les valeurs extrêmes s_1 et s_2 prises par s sur la courbe intégrale d'équation $xy\, e^{-(x+y)} = K\, e^{-2}$; donner le développement limité de s_1 et s_2 à l'ordre deux en fonction de l'infiniment petit principal α lié à K par $K = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$. Dans la suite du problème, on prendra désormais $K = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.

b. On étudie maintenant la quantité $\xi^2 + \eta^2 = f(s)$.

Déterminer explicitement $f(s)$. Pour quelles valeurs de s, $|f'(s)|$ atteint-elle son maximum sur l'intervalle (s_1, s_2); on discutera.

c. Former le système différentiel (D') vérifié par ξ et η. A ce système, on associe le système (D'_1) linéaire :

$$\begin{cases} \xi' = -\eta \\ \eta' = \xi \end{cases}$$

Quelles sont les courbes intégrales de ce système?

d. On considère les courbes intégrales de (D') et de (D'_1) passant par le point :

$$\xi_0 = -\eta_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$$

En majorant la différence $f(s) - f(0)$, montrer que ces deux courbes restent voisines en un sens à préciser.

e. Quand $\alpha \to 0$, évaluer la limite de $\int_{C_\alpha} \omega_1$ et $\int_{C_\alpha} \omega_2$, où C_α désigne le cercle de centre (1, 1) et de rayon α.

7° Discuter brièvement l'allure des solutions de l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-\gamma + \delta x)}{x(\alpha - \beta y)}$$

avec α, β, γ, δ réels positifs.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail